UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero-Marzo 00

Nombre: ____________________

Carnet: ______________ Sección: ______

MA 2112. Segundo Examen Parcial. 9.30am Tipo B

1. 12pts. Considérese la integral

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$$

   (a) Dibujar la región A de integración

   (b) Escribir la integral que se obtiene intercambiando el orden de integración

   (c) Calcular el área de A, usando (a) o (b) según gusto.

Solución Preg. 1
(a) A es la región entre $y = x^2$ y $y = x + 2$, $-1 \leq x \leq 2$.

(b) Haciendo caso al dibujo, se obtiene

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} dx + \int_{1}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$$

(c) Da 9/2. Evidentemente mas fácil usando la versión original.

2. 13 pts. Si Ω es la región definida por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, y si la densidad de masa en Ω es $\delta(x,y,z) = (x^2+y^2)z$, hallar la masa de Ω.

Solución Preg. 2. La masa $M = \int\int\int_\Omega \delta dV$. La proyección D de Ω en el plano xy se obtiene eliminando z entre las ecuaciones. Resulta $x^2+y^2 \leq 2$, un disco de radio $\sqrt{2}$. Luego

$$
\begin{aligned}
M &= \int\int\int_\Omega (x^2+y^2)zdV \\
&= \int\int_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)zdz \\
&= \int\int_D \frac{1}{2}\left((x^2+y^2)(4-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\right)\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int\int_D (x^2+y^2)(4-2(x^2+y^2))dxdy
\end{aligned}
$$

Cambiando a polares, y cancelando un factor de 2, la integral es

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r^2(2-r^2)rdrd\theta &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3(2-r^2)dr \\
&= 2\pi\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{6}\Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= = 2\pi(\frac{4}{2}-\frac{8}{6}) = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

La masa de Ω es $M = \frac{4\pi}{3}$

3. 13pts. Sea $D \subset R^2$ la región del primer cuadrante acotada por $y = x$, $y = 4x$, $xy = 2$, $xy = 3$.
   (a) Dibujar D
   (b) Calcular $\int\int_D (x^2 - y^2) dx dy$.
   Ayuda: Considerar el cambio de variables $u = xy, v = y$.

Solucion Preg. 3. D es

Usar la transformación $u = xy$, $v = y$. Despejando $x = u/v, y = v$. Entonces D se transforma en l región D^* acotado por $u = 2$, $u = 3$, $u = v^2, u = 4v^2$. El Jacobiano es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo det. es $1/v$. La integral vuelve en

$$\begin{aligned}
\int\int_{D^*} (\frac{u^2}{v^2} - v^2).\frac{1}{v} dudv &= \int_2^3 \int_{\sqrt{u}}^{2\sqrt{u}} \frac{u^2}{v^3} - vdudv \\
&= \int_2^3 du \int_{\sqrt{u}}^{2\sqrt{u}} \frac{u^2}{v^3} - vdv \\
\int_{\sqrt{u}}^{2\sqrt{u}} \frac{u^2}{v^3} - vdv &= \frac{-u^2}{2v^2} - \frac{v^2}{2}\Big|_{v=\sqrt{u}}^{2\sqrt{u}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4u} + 4u - \frac{u^2}{u} - u\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{u}{4} + 2u\right) \\
&= -\frac{9u}{8} \\
\int_2^3 -\frac{9u}{8} du &= -\frac{9u^2}{16}\Big|_2^3 \\
&= -\frac{45}{16}
\end{aligned}$$

Asi que la integral vale $-\frac{45}{16}$.

4. 12pts.

   (a) Sea C una curva simple cerrada en R^2. Mostrar que el área de la región encerrada por C es $1/2 \int_C xdy - ydx$

   (b) Hallar el área encerrada por C, cuando C es un lazo de la rosa a cuatro hojas $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$. (Ayuda: mostrar que $xdy - ydx = r^2 d\theta$)

Solución Preg. 4. (a) Aplicar Green al campo $(-y, x)$, que es C^∞ en todo $\mathbf{R}^2$. Directament da que $\int_C xdy - ydx = \int\int_A 2dxdy$. ($A$ el interior de C).
(b)$x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ de donde $dx = \cos\theta dr - r\operatorname{sen}\theta d\theta$, $dy = \operatorname{sen}\theta dr + r\cos\theta d\theta$. Luego, $xdy - ydx = r^2 d\theta$.

La hoja del primer cuadrante de la rosa esta dada por $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces, cambiando a polares, $\int_C xdy - ydx = \int_0^{\pi/2} r^2 d\theta$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} r^2 d\theta &= \int_0^{\pi/2} 9\operatorname{sen}^2 2\theta d\theta \\
&= 9\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{9}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{9\pi}{8}
\end{aligned}$$

Asi, usando la primera parte, el área es $\dfrac{9\pi}{8}$